ORDRE

I. Comparaison des nombres

1. Définition : soit a et b deux nombres réels.
Dire que a est dit supérieur (ou égal) à b revient à dire que la différence a - b est positive :

$$a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$$

Autrement dit : « la différence du nombre le plus grand et du nombre le plus petit donne un nombre positif »

Autres notations :
$a \leq b$ (a inférieur (ou égal) à b) $\Leftrightarrow a - b \leq 0$
$a > b$ (a strictement supérieur à b) $\Leftrightarrow a - b > 0$
$a < b$ (a strictement inférieur à b) $\Leftrightarrow a - b < 0$

2. Méthodes de comparaison:

a) Un nombre positif est toujours supérieur à un nombre négatif !
Si les deux nombres sont négatifs, comparer d'abord leur distance à zéro et les ranger dans l'ordre inverse de leur distance à 0.

b) Faire la différence des deux nombres et regarder le signe de cette différence.
Exemples :
i) Comparons $(n+1)^2$ et n^2+1 dans Z.

$$(n+1)^2 - (n^2+1) = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 1 = 2n$$

Donc : Si $n \in Z^+$ alors $2n \in Z^+$ et donc $(n+1)^2 > (n^2+1)$

Si $n \in Z^-$ alors $2n \in Z^-$ et donc $(n+1)^2 < (n^2+1)$

ii) Comparons $\frac{n}{n+1}$ et $\frac{n-1}{n}$ pour n un entier naturel non nul.

$$\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - (n+1)(n-1)}{n(n+1)} = \frac{n^2 - (n^2-1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Sur N*, $n(n+1) > 0$, donc $\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} > 0$ et donc $\frac{n}{n+1} > \frac{n-1}{n}$

c) Si les nombres sont en écriture fractionnaire, soit les mettre au même dénominateur et les ranger dans l'ordre de leurs numérateurs, soit les mettre au même numérateur et les ranger dans l'ordre inverse de celui de leurs dénominateurs, soit les comparer par rapport à 1.

Exemples : 1) Comparons $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{3}{10}$:

$$-\frac{1}{2} = -\frac{5}{10} \text{ et } \frac{5}{10} > \frac{3}{10} \text{donc } -\frac{5}{10} < -\frac{3}{10} \text{ par conséquent } -\frac{1}{2} < -\frac{3}{10}$$

2) Comparons $\frac{25}{55}$ et $\frac{5}{13}$:

$\frac{25}{55} = \frac{5}{11}$ et $\frac{5}{13} < \frac{5}{11}$ donc $\frac{5}{13} < \frac{25}{55}$

3) Comparons $\frac{5}{13}$ et $\frac{13}{5}$: $\frac{5}{13} < 1$ et $\frac{13}{5} > 1$ donc $\frac{5}{13} < \frac{13}{5}$

4) Comparons $\frac{n}{n+1}$ et $\frac{n-1}{n}$ pour n un entier naturel non nul (autre méthode) :

$\frac{n-1}{n} : \frac{n}{n+1} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} = \frac{n^2-1}{n^2}$ or $n^2 - 1 < n^2$ donc $\frac{n^2-1}{n^2} < 1$, c'est à dire $\frac{n-1}{n} : \frac{n}{n+1} < 1$

et par conséquent $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$. On a utilisé ici la règle pour des réels positifs : $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b$.

II. Inégalités

1. Opérations et inégalités

Règle : Si $a < b$ et c un nombre quelconque alors $a + c < b + c$

"*Additionner aux deux membres d'une inégalité un même nombre, ne change pas le sens de l'inégalité* "

Preuve : $a < b$ signifie que $a - b < 0$

De plus $(a+c) - (b+c) = a + c - b - c = a - b$

Donc $(a+c) - (b+c) < 0$ ce qui signifie $a + c < b + c$.

Règle de transposition :

Si $a + c < b$ alors $a < b - c$

"*transposer un nombre , ne change pas le sens de l'inégalité*".

Preuve: si $a + c < b$, en ajoutant à chaques membres de l'inégalité l'opposé de c on obtient:

$a + c - c < b - c$ ou encore $a < b - c$.

Règle de multiplication :

Si $a < b$ et $c > 0$ alors $ac < bc$

"*Multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement positif ne change pas le sens de l'inégalité*. "

Si $a < b$ et $c < 0$ alors $ac > bc$

"*Multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement négatif change le sens de l'inégalité*"

Preuve : $a < b$ signifie que $a - b < 0$

De plus $ac - bc = c\,(a - b)$.

Si $c > 0$, $c\,(a - b) < 0$

Donc $ac - bc < 0$ ce qui signifie $ac < bc$

Si $c < 0$, $c\,(a - b) > 0$

Donc $ac - bc > 0$ ce qui signifie $ac > bc$

Remarque : *Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse* (diviser par c, revient à multiplier par son inverse $\frac{1}{c}$).

Conséquence :

Si $a < b$ et $c > 0$ alors $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Si $a < b$ et $c < 0$ alors $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

2. Application à la résolution d'inéquations :

1)

$-2x + 3 \leq x - 2$ transposition : pour « isoler » les termes en « x »

$-2x - x \leq -2 - 3$ réduction (ou simplification)

$-3x \leq -5$ division par -3 (ou multiplication par son inverse)

$x \geq \frac{5}{3}$

Donc $S = \left[\frac{5}{3};+\infty\right[$.

2) $(2x+3)^2 < 4x^2 - 2x + 5$ Développement

$4x^2 + 12x + 9 < 4x^2 - 2x + 5$ Transposition

$4x^2 + 12x - 4x^2 + 2x < 5 - 9$ Réduction

$14x < -4$

$x < -\frac{2}{7}$ Donc $S = \left]-\infty;-\frac{2}{7}\right[$.

3) $0x < 13$ Cette inégalité est toujours vraie quel que soit la valeur de x. Donc $S = \mathbb{R}$

4) $0x > 14$ Cette inégalité n'est jamais vérifiée quel que soit la valeur de x. Donc $S = \varnothing$

5) $3 \leq x < 4$ Donc $S = [3;4[$

6)

$$\begin{cases} 2(x-1) + 5(x+2) \geq 3 \\ 3x - 2 > -5 + 4x \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 2 + 5x + 10 \geq 3 \\ 3x - 4x > 2 - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x + 8 \geq 3 \\ -x > -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x \geq 3 - 8 \\ x < 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x \geq -5 \\ x < 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -\frac{5}{7} \\ x < 3 \end{cases}$$

Donc $S = \left[-\frac{5}{7};3\right[$